λ－転移とquasi-particle model

鈴 木 増 雄（東大理）

最近、二次の相転移の問題が盛んに研究されだしたようである。歴史は古いのであるが、最近の傾向としては、理論の精密化が要求され、特に、critical point 近くでのsingularity を、多くの人が問題にしているようである。二次の相転移というと、実は物性物理の中の興味ある現象がほとんど含まれてしまうのであつて、良く知られているように、Bose 流体の相転移，超電導，Spin 系の相転移，強誘電体の相転移等が、その代表的なものである。ここでは、その中のBose 流体の二次の相転移について、簡単な議論をしてみたい。

二次の相転移は、比熱の不連続ないし、その発散というsingularity によつて特徴づけられる。実験的には、He II の比熱 C_p の測定が、非常に精密に行われ、critical point T_0 の両側で、$\log|T-T_0|$ に良く乗つている[1)]。

一般に、多体系の議論をするのに、いろいろな方法があるが、その中で、最も良く使われるものとして、Hartree 近似の方法がある。更に、有限温度に拡張したhot Hartree 近似も良く使われる。又Green 函数を用いて、Hartree 近似の範囲で、問題を議論することも多い。Hartree 近似から、更に一段と進めようとすると、Green 函数のdecoupling がやつかいになる。λ-transition の問題で、hot Hartree 近似で、transition 近傍まで議論しようとする試みもいくつかある。又最近、Green 函数を用いて、decoupling をやらずに、漸近解を求めることによつて、singularity の様子を議論しているのもある。

いずれの方法に於いても、何らかの型で、quasi-particle の energy spectrum の 性質を媒介にして、transition 近傍の議論をしている。しかし、多体問題の一般的困難性により、quasi-particle energy を(damping まで含めて）正確に計算することは、一般には出来ない。

ここでは、Hamiltonian から、quasi-particle の energy を、近似的に求めようとすることは止めて、仮りに、それが求まつたとした場合に、一

般にどういうことが言えるかを調べてみる。即ちmodel として、quasi-particle の型とsingularity の関係を議論する。実はこの問題は、「物性研究」Vol.3 No.2 の Critical phenomena 研究会報告の中で、松平氏のメモとして、結果だけ表にしてあるのですが、それを見ると、比熱C_Vの方は問題ないのですが、今一番関心のある定圧比熱C_pの singularity が、高温側と抵温側とで、全く同じ型になるかの如く書いてある。これは重大な誤りである。恐らく、世話人の書き損じかと思いますが、僕もずつと以前に、この計算をしましたので、高温側と低温側とでは、全然様子が異なることを注意する為に、敢えてここにのせて戴く次第です。

さて、energy Spectrum が $E_p = Ap^{\alpha}$ で与えられるような ideal quasi-particle の集合の熱力学的函数は、容易に次のように与えられる。

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = -NT\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_p$$

$$= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1}$$

total energy E は

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon D(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} d\varepsilon \tag{2}$$

状態方程式は、

$$pV = -kT\int_0^{\infty} D(\varepsilon)\log\left(1-e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\right) d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\tilde{D}(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} d\varepsilon \tag{3}$$

ここで、state density $D(\varepsilon)$ は

$$D(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{D}(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\cdot\frac{V}{h^3}\cdot\int_0^{p} 4p^2 dp$$

$$= \frac{4\pi}{\alpha}\frac{V}{h^3}\cdot A^{-\frac{3}{\alpha}}\cdot\varepsilon^{\frac{3}{\alpha}-1} \tag{4}$$

故に、(3)より

$$p = \frac{1}{h^3}\frac{4\pi}{3}A^{-\frac{3}{\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{3}{\alpha}}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\, d\varepsilon \tag{5}$$

そこで、$T \geqq T_0$ の時は、この式から、p を fix して、T で微分を行つて

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_p \sim F''_\alpha(-\beta\mu)$$

ここで、

$$F_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{\alpha}}}{e^{t+x}-1}\, dt \tag{6}$$

$$\therefore \quad F''_\alpha(x) \sim \int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{\alpha}}}{(t+x)^3}\, dt \tag{7}$$

更に、μ を T_0 のまわりで展開して

$$\mu = a(T-T_0) + \cdots\cdots \tag{8}$$

(7)式の higher order term には、分数巾の term があつてもよい。

（事実、ideal gas $(\alpha=2)$ の時は、$(T-T_0)^{\frac{3}{2}}$ の term がある。）

依つて、C_p には(7)の singularity が、そのまま反映される。結果は、$T \geqq T_0$ では、松平氏の table と同じで、

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{3}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad C_p \;;\; \text{finite} \\ \alpha = \frac{3}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \log(T-T_0) \\ 3 > \alpha > \frac{3}{2} & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (T-T_0)^{-(2-\frac{3}{\alpha})} \end{cases}$$

（注）C_p の積分は energy で、これはすべての温度で finite だから、C_p の singularity は $1/T-T_0$ よりは弱いものでなければならない。

次に、低温側（$T < T_0$）を議論しよう。この領域では、$\mu \equiv 0$ であるから、C_p を求めるのに(1)の最後の式を用いて、考えるとよい。さて、(5)式で、$\mu = 0$ とおいて

$$p = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{h^3} A^{-\frac{3}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{3}{\alpha}}}{e^{\beta\varepsilon}-1} d\varepsilon \qquad (9)$$

ここで、Aが定数ならば、圧力Pは温度Tによつて、一意的に定まつてしまう。即ち、低温側では、圧力と温度は、独立な変数と見なすことは出来ない。依つて、定圧比熱は、低温側では、存在しない。

しかし、ここで、もう少しrealistic な quasi-particle model として、energy spectrum が density ρ による場合を考えると、低温側でも C_p は存在する。即ち、$A = A(\rho)$ と考えれば、(9)式が、そのまま、成立し、pを一定にして、温度Tで微分すると、$\rho = \frac{N}{V}$ より、$(\frac{dV}{dT})_p$ を求めることが出来る。結果は

$$(\frac{dV}{dT})_p \propto \frac{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{3}{\alpha}+1}}{(e^{\beta\varepsilon}-1)^2} d\varepsilon}{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{3}{\alpha}}}{e^{\beta\varepsilon}-1} d\varepsilon} = \text{finite} .$$

一方、容易に次式が示される。

$$PV = \frac{\alpha}{3} E \qquad (10)$$

そこで

$$C_p = (\frac{dE}{\partial T})_p + p(\frac{\partial V}{\partial T})_p = (\frac{3}{\alpha}+1)\cdot P\cdot(\frac{\partial V}{\partial T})_p$$

故に、低温側では、α の値にかかわらず、C_pは有限である。このように、高温側と低温側とでは、ideal quasi-particle picture を、そのまま用いると、比熱 C_p の singularity の様子は、全然異なるのである。

Liq. He の比熱の実験によると、高温側も低温側も、同じ係数の対数発散を示している。したがつて、これを説明するには、単なるquasi-particle picture では、うまくいかない。

(reference)

1) M.J. Buckingham & W.M. Fairbank ; Prog in Low Temp. Phys. III.